

LE RAISONNEMENT BAYÉSIEN

Mettre à jour ses croyances

Le **raisonnement bayésien** est au cœur de nombreux algorithmes de décision et intervient dans de nombreux domaines concrets (sport, médecine, justice...) où l'on doit tirer des conclusions à partir d'informations incomplètes. Il repose sur le **théorème de Bayes**, qui permet de calculer la probabilité d'un événement en combinant les **informations déjà connues** avec de **nouvelles observations**. Ce raisonnement mesure dans quelle proportion une **observation renforce (ou affaiblit) une hypothèse** : ici, la probabilité représente un degré de croyance. Le théorème de Bayes aide ainsi à ne pas surestimer des preuves spectaculaires mais rares, ni à négliger des explications simples et fréquentes.

Le théorème de Bayes

Soit A et B deux événements :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

“Probabilité de B sachant A”
= Compatibilité des observations avec l'hypothèse A (probabilité conditionnelle)

“Probabilité de A sachant B”
= Ce que l'on a appris (a posteriori)

“Probabilité de A”
= Croyance préalable (a priori)

“Probabilité de B”
= Fréquence naturelle des observations (probabilité marginale)

Dans une enquête policière, le théorème de Bayes peut s'utiliser pour raisonner à partir des indices. On peut le représenter métaphoriquement de la façon ci-contre.

POLICE LINE - DO NOT CROSS

$$\text{“Probabilité que le suspect soit coupable compte tenu des indices”} = \frac{\text{“Si le suspect est coupable, est-ce que les indices collent ?”}}{\text{“Ces indices, à quel point pourraient-ils apparaître même si quelqu'un d'autre est coupable ?”}}$$

Exemple d'application

- 1 personne sur 10 000 fait un infarctus à un instant donné dans la population générale.
- 90% du temps, si quelqu'un fait un infarctus, il a une douleur thoracique.
- La douleur thoracique est un symptôme fréquent (due par exemple au stress, à un reflux gastrique, à de l'anxiété, etc...) : environ 5% de la population présente une douleur thoracique à un moment donné.

Quelle probabilité de faire un infarctus en ayant une douleur thoracique ?

Soit I l'événement “Faire un infarctus” et D l'événement “avoir une douleur thoracique”. On applique la formule de Bayes pour répondre à la question :

$$P(I|D) = \frac{P(D|I) \times P(I)}{P(D)}$$

“Probabilité d'avoir une douleur en faisant un infarctus”
“Probabilité de faire un infarctus”
“Probabilité d'avoir une douleur (avec et sans infarctus)”

$$P(I|D) = \frac{0,9 \times 0,0001}{(0,9 \times 0,0001 + 0,05 \times 0,9999)} = 0,002 = 0,2\%$$



Si on se présente aux urgences avec une douleur thoracique, la probabilité que l'on soit en train de faire un infarctus reste **très faible** : 0,2% de chances !

En pratique, les médecins font souvent ce type de raisonnement. Ils combinent différents symptômes et tiennent compte de l'âge et des facteurs de risque pour réduire le dénominateur et ainsi augmenter la **fiabilité** de leur diagnostic.

Pour aller plus loin :

- <https://www.20minutes.fr/sciences/2889427-20201023-pourquoi-sherlock-holmes-beaucoup-moins-genial-annees-1960>
- *Bayesian Probability for Babies* par Chris Ferrie, 2019. Baby University Series.
- Cours sur l'inférence bayésienne par Boris Hejblum : <https://sta305bayes.borishejblum.science>